Uitwerkingen CCVW Wiskunde A 15-12-2022

Vraag 1a - 6 punten

$f'(x) = 48 \cdot 4x^3 - 64 \cdot 3x^2 + 24 \cdot 2x = 192x^3 - 192x^2 + 48x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 48x(4x^2 - 4x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 4x^2 - 4x + 1 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ of $x = \frac{4 \pm 0}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$

$f(0) = -1;\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$ de minimumwaarde is dus $f(0) = -1$

Vraag 1b - 5 punten

$g'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{-2x} + x \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot -2 = \mathrm{e}^{-2x} - 2x\mathrm{e}^{-2x}$

$g'(0) = 1 \cdot \mathrm{e}^0 - 0 \cdot \mathrm{e}^0 = 1 - 0 = 1$

De vergelijking van de raaklijn is dus $y = x$

Vraag 1c - 4 punten

$h(x) = 108 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^x = 108 \Leftrightarrow 4^x = 36 \Leftrightarrow x = {}^4\log(36) = \dfrac{\log(36)}{\log(4)} \approx 2{,}585$

Vraag 1d - 4 punten

$\log(R) = \frac{1}{5}Q - 3 \Leftrightarrow 10^{\log(R)} = 10^{\frac{1}{5}Q-3} \Leftrightarrow R = 10^{\frac{1}{5}Q-3} = 10^{\frac{1}{5}Q} \cdot 10^{-3} = \left(10^{\frac{1}{5}}\right)^Q \cdot 10^{-3}$

Hieruit volgt $c = 10^{-3} = 0{,}001$ en $d = 10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10} \approx 1{,}5849$

Vraag 2a - 2 punten

5 tegels links, 5 tegels rechts en 9 + 2 tegels boven geeft 21 tegels

Vraag 2b - 4 punten

$a(n)$ is een rekenkundige rij waarbij iedere term 4 groter is dan de vorige

Dit geeft $a(n) = a(1) + (n-1) \cdot 4 = 1 + (n-1)4 = 1 + 4n - 4 = 4n - 3$t

Alternatief:

De directe formule voor een rekenkundige rij $u(n)$ (lineair verband) wordt gegeven door

$u(n) = b + an$ met $b = u(0)$

Uit de recursieve formule volgt $a = 4$

Uit $a(n+1) = a(n) + 4$ volgt $a(1) = a(0) + 4 \Leftrightarrow a(0) = 4 - a(1) = 4 - 1 = -3$

Vraag 2c - 4 punten

$Som = \frac{1}{2} \cdot aantal\ termen \cdot (u_e + u_l)$ met $u_e = a(1) = 1$ en $u_l = a(n) = 4n - 3$

Dit geeft $Som = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (1 + 4n - 3) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (4n - 2) = \frac{1}{2} \cdot (4n^2 - 2n) = 2n^2 - n$

Hieruit volgt $p = 2$ en $q = 1$

Vraag 3a - 4 punten

Voor iedere beurt is de kans dat de raaf niet boven komt gelijk aan $\frac{5}{6}$

De kans dat de raaf niet boven komt in 40 beurten is dus $\left(\frac{5}{6}\right)^{40} \approx 0{,}00068$

$\frac{1}{1500} \approx 0{,}00067$, dus Hielke heeft (net aan) niet gelijk

Vraag 3b - 5 punten

De kans dat de fruitmand geen enkele keer boven komt is $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

De kans dat de fruitmand precies één keer bovenkomt is $\binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$

De kans dat de fruitmand minstens twee keer bovenkomt is $1 - \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{9}\right) \approx 0{,}5155$

Vraag 3c - 2 punten

$H_0\colon\ p = \frac{1}{6};\ H_1\colon\ p \neq \frac{1}{6}$

Vraag 3d - 4 punten

De toetsingsgrootheid X, het aantal malen "raaf" bij deze 100 worpen, is binomiaal verdeeld met $n = 100$ en $p = \frac{1}{6}$

$E(X) = np = 100 \cdot \frac{1}{6} = 16\frac{2}{3} \approx 16{,}67;\ \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} \approx 3{,}7268$

Vraag 3e - 2 punten

Je kunt geen conclusie trekken uit deze toetsingsprocedure, want daarvoor moet je de gegeven overschrijdingskans vergelijken met de onbetrouwbaarheidsdrempel en deze is niet bekend.

Vraag 4a - 4 punten

De oppervlakte onder de kromme tussen $\mu = 45$ en $\mu + 1\frac{1}{2}\sigma = 60$ is even groot als de oppervlakte onder de kromme tussen $\mu - 1\frac{1}{2}\sigma$ en μ

Deze oppervlakte is gelijk aan $0{,}092 + 0{,}150 + 0{,}191 = 0{,}092 + 0{,}341 = 0{,}433$,
dus 43,3% van de appels heeft een gewicht tussen 45 en 60 gram

Vraag 4b - 5 punten

Gemiddelde: $4 \times 145 + 20 = 600$; standaarddeviatie: $\sqrt{4 \times 10^2 + 1^2} = \sqrt{401}$

Vraag 4c - 4 punten

Noteer W = wel boven de 150 gram, N = niet boven de 150 gram.

$P(WWN) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10};\ P(WNW) = \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{4}{10};\ P(NWW) = \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10}$

De gevraagde kans is dus $3 \times \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} = \frac{7}{22} \approx 0{,}3182$

Alternatief:

De gevraagde kans wordt gegeven door $\dfrac{\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{1}}{\binom{12}{3}} = \dfrac{10 \cdot 7}{220} = \frac{7}{22} \approx 0{,}3182$

Vraag 5a - 2 punten

De periode van h wordt gegeven door $\frac{2\pi}{c}$ met $c = \frac{1}{2}\pi$, de periode is dus $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2 \times 2 = 4$

De lengte van de verkeersdrempel is zodoende 4 meter

Vraag 5b - 6 punten

De minimale waarde van h is 0 m, de maximale waarde van h is 0,14 m.

Dit geeft $a = evenwichtsstand = \frac{0+0{,}14}{2} = 0{,}07$ en $b = amplitude = 0{,}14 - 0{,}07 = 0{,}07 - 0 = 0{,}07$

$periode = \frac{2\pi}{c}$ geeft $c = \frac{2\pi}{periode} = \frac{2\pi}{12} = \frac{1}{6}\pi$

De evenwichtsstand wordt bereikt op $x = \frac{1}{4}periode = \frac{1}{4} \cdot 12 = 3$

$x - d = 0$ geeft dan $3 - d = 0 \Leftrightarrow d = 3$

Alternatieven voor de berekening van d:

Als $x = 0$ is h minimaal, dus is $\sin\left(\frac{1}{6}\pi(x-d)\right) = -1 \Leftrightarrow \sin\left(-d \cdot \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right)$

Dit geeft $-d \cdot \frac{1}{6}\pi = -\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow -d = \frac{-\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{6}\pi} \Leftrightarrow d = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

Ook goed is $\sin\left(-d \cdot \frac{1}{6}\pi\right) = \sin\left(1\frac{1}{2}\pi\right) \Leftrightarrow -d \cdot \frac{1}{6}\pi = 1\frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow -d = \frac{1\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{6}\pi} \Leftrightarrow d = -1\frac{1}{2} \cdot 6 = -9$

Vraag 6a - 2 punten

$t = 30$ geeft $H = 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \cdot 30)^{\frac{2}{3}} = 1{,}8 - 0{,}333^{\frac{2}{3}} \approx 1{,}8 - 0{,}48 = 1{,}32$

Vraag 6b - 6 punten

$H = 0{,}9 \Leftrightarrow 1{,}8 - (0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t)^{\frac{2}{3}} = 0{,}9 \Leftrightarrow (0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t)^{\frac{2}{3}} = 0{,}9 \Leftrightarrow 0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t = 0{,}9^{\frac{3}{2}}$

Hieruit volgt $0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t = 0{,}8538 \Leftrightarrow 0{,}0039 \cdot t = 0{,}6378 \Leftrightarrow t = \frac{0{,}6378}{0{,}0039} = 163{,}5423$

Dat is na 9813 seconden (163 minuten en 33 seconden)

Vraag 6c - 5 punten

$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}(0{,}216 + 0{,}0039 \cdot t)^{-\frac{1}{3}} \cdot 0{,}0039$

Invullen van $t = 10$ geeft

$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}(0{,}216 + 0{,}0039 \cdot 10)^{-\frac{1}{3}} \cdot 0{,}0039 = -\frac{2}{3} \cdot 0{,}255^{-\frac{1}{3}} \cdot 0{,}0039 = -0{,}0041$

Het vloeistofniveau neemt dus af met 0,41 centimeter per minuut.

